Matematika Diskrit

[KOMS119602] - 2022/2023

6.1 - Inferensi (penarikan kesimpulan)

Dewi Sintiari

Prodi D4 Teknologi Rekayasa Perangkat Lunak
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 6 (Oktober 2022)

Bagian 1: Tautologi

Tautologi

Tautologi adalah proposisi majemuk yang selalu bernilai benar, terlepas dari nilai kebenaran dari variabel-variabel yang terlibat di dalamnya.

Proposisi majemuk yang selalu bernilai salah disebut kontradiksi.

Contoh

Diberikan proposisi p. Buatlah tabel kebenaran dari

$$p \vee \neg p \quad dan \quad p \wedge \neg p$$

Tautologi

Tautologi adalah proposisi majemuk yang selalu bernilai benar, terlepas dari nilai kebenaran dari variabel-variabel yang terlibat di dalamnya.

Proposisi majemuk yang selalu bernilai salah disebut kontradiksi.

Contoh

Diberikan proposisi p. Buatlah tabel kebenaran dari

$$p \vee \neg p \quad dan \quad p \wedge \neg p$$

TABLE 1 **Examples of a Tautology and a Contradiction.**

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

Sifat-sifat terkait Tautologi

TABLE 6 Logical Equivalences.

Equivalence	*Name*
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Identity laws
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Domination laws

Bagian 2: Inferensi (Penarikan Kesimpulan)

Argumen

Definisi

Argumen dalam logika proporsional adalah barisan proposisi. Pada argumen, proposisi yang bukan merupakan proposisi akhir disebut premis dan proposisi akhir disebut kesimpulan.

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline q \end{array}$$

Dalam hal ini, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ disebut hipotesis (premis) dan q disebut kesimpulan (konklusi).

Inferensi (penarikan kesimpulan)

Diberikan beberapa proposisi. Dari rangkaian proposisi tersebut dapat ditarik sebuah kesimpulan. Proses ini disebut inferensi.

Metode penarikan kesimpulan

1. Modus ponen
2. Modis tollen
3. Silogisme

Bagian 2.1: Modus ponen

Modus ponen

Dasar dari aturan ini adalah **tautologi**:

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

Buktikan dengan tabel kebenaran apakah:

$$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$$

adalah tautologi.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Modus ponen

Ini berarti, diberikan proposisi $p \Rightarrow q$ dan p. Maka dapat ditarik kesimpulan q.

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Latihan 1

Apakah argumen berikut sahih?

Hipotesis 1:	Jika saya sedang sakit, maka saya diam di rumah
Hipotesis 2:	Saya sedang sakit

Kesimpulan:	Saya diam di rumah

Solusi Latihan 1

Misalkan:

- p: proposisi "Saya sedang sakit."
- q: proposisi "Saya diam di rumah."

Maka argumen tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Hal ini sesuai dengan **modus ponen**.

Latihan 2

Diberikan argumen:

"Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang.

Air laut surut setelah gempa di laut."

Kesimpulan: *Tsunami datang.*

Apakah argumen tersebut sahih?

Latihan 2

Diberikan argumen:

> *"Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang.*
>
> *Air laut surut setelah gempa di laut."*
>
> **Kesimpulan:** *Tsunami datang.*

Apakah argumen tersebut sahih?

Solusi:

Misalkan:

- p: proposisi "Air laut surut setelah gempa di laut."
- q: proposisi "Tsunami datang."

Maka argumen tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Bagian 2.2: Modus tollen

Modus tollen

Dasar dari aturan ini adalah **tautologi**:

$$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$$

Buktikan dengan tabel kebenaran apakah:

$$[((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p]$$

adalah tautologi.

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$	$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q$
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T

Latihan 1

Apakah argumen berikut sahih?

- Jika saya sedang sakit, maka saya diam di rumah
- Saya tidak diam di rumah

Kesimpulan: Saya tidak sedang sakit.

Latihan 1

Apakah argumen berikut sahih?

- Jika saya sedang sakit, maka saya diam di rumah
- Saya tidak diam di rumah

Kesimpulan: Saya tidak sedang sakit.

Solusi:

Misalkan:

- p: proposisi "Saya sedang sakit."
- q: proposisi "Saya diam di rumah."

Maka argumen tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \qquad \neg p \end{array}$$

Argumen tersebut sahih memenuhi modus tollen.

Latihan 2

Apakah argumen berikut sahih?

Jika 13 adalah bilangan prima, maka 3 tidak habis membagi 17
3 habis membagi 17

---

13 bukan bilangan prima

Solusi Latihan 2

- p: 13 adalah bilangan prima;
- q: 3 habis membagi 17

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow \neg q \\ q \\ \hline \\ \neg p \end{array}$$

Argumen tersebut memenuhi modus tollen.

Pembuktian validitas modus tollen

Modus tollen juga dapat dibuktikan dengan memanfaatkan modus ponen dan sifat kontrapositif.

$$\textbf{Kontraposisi} : (p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

Perhatikan bahwa:

$$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q)$$

equivalen dengan:

$$((\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge \neg q)$$

Proposisi majemuk terakhir ini sesuai dengan **modus ponen**. Maka:

$$((\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$$

Bagian 2.3: Silogisme

Silogisme

Dasar dari aturan ini adalah **tautologi**:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Buktikan dengan tabel kebenaran apakah:

$$[((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

adalah tautologi.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(q \Rightarrow r)$	$t = (p \Rightarrow r)$	$s = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r))$	$s \Rightarrow t$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	F	T

Latihan 1

Apakah argumen berikut sahih?

Jika saya menyukai Informatika, maka saya belajar sungguh-sungguh
Jika saya belajar sungguh-sungguh maka saya lulus

Jika saya menyukai Informatika, maka saya lulus

Solusi Latihan 1

Misal:

- p: Saya menyukai Informatika
- q: Saya belajar sungguh-sungguh
- r: Saya lulus

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}$$

Berdasarkan aturan silogisme, argumen tersebut valid.

Latihan 2

Apakah argumen berikut sahih?

Jika saya kuliah di TRPL, maka saya tidak bermalas-malasan
Saya bermalas-malasan atau saya ingin lulus

Jika saya kuliah di TRPL maka saya ingin lulus

Petunjuk (hint):

Perhatikan bahwa $(p \Rightarrow q)$ *ekuivalen dengan* $(\neg p \vee q)$

Bukti:

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

Dengan kata lain, $(p \vee q)$ ekuivalen dengan $(\neg p \Rightarrow q)$

Solusi Latihan 2

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Jika saya kuliah di TRPL, maka saya tidak bermalas-malasan}\\ \text{Saya bermalas-malasan atau saya ingin lulus}\end{array}}{\text{Jika saya kuliah di TRPL maka saya ingin lulus}}$$

Misal:

- p: Saya kuliah di TRPL;
- q: Saya bermalas-malasan;
- r: Saya ingin lulus

Argumen tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow \neg q \\ q \vee r \\ \hline ??? \end{array}$$

Bisakah ditarik kesimpulan? Jika iya, apa kesimpulannya?

Solusi Latihan 2

Kita tuliskan dengan menggunakan notasi logika.

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow \neg q \\ q \vee r \\ \hline \\ ? \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \Rightarrow \neg q \\ \neg q \Rightarrow r \\ \hline \\ p \Rightarrow r \end{array}$$

Latihan 3

Apakah argumen berikut sahih?

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Jika saya kuliah di TRPL, maka saya tidak bermalas-malasan}\\ \text{Saya bermalas-malasan atau saya ingin lulus}\end{array}}{\text{Jika saya tidak ingin lulus maka saya tidak kuliah di TRPL}}$$

Kerjakan latihan tersebut seperti pada Latihan 2.

Bagian 3: Validitas argumen

Argumen

Definisi

Sebuah argumen dikatakan sahih (valid) jika:

> *konklusi benar jika dan hanya jika semua hipotesisnya benar*

Sebuah argumen yang tidak valid, disebut (invalid).

Argumen yang sahih berarti bahwa implikasi berikut bernilai benar:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Rightarrow q$$

Catatan:

Valid tidak sama dengan benar (true).

Validitas modus ponen

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Validitas modus tollen

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q$$

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$	$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q$
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T

Contoh 1

Silogisme menyatakan bahwa proposisi:

$$(p \Rightarrow q) \;\; \text{dan} \;\; (q \Rightarrow r)$$

menghasilkan kesimpulan $(p \Rightarrow r)$.

Untuk menguji validitas, coba buat tabel kebenaran untuk

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Contoh 1

Silogisme menyatakan bahwa proposisi:

$$(p \Rightarrow q) \text{ dan } (q \Rightarrow r)$$

menghasilkan kesimpulan $(p \Rightarrow r)$.

Untuk menguji validitas, coba buat tabel kebenaran untuk

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

p	q	r	$x = p \Rightarrow q$	$y = q \Rightarrow r$	$z = p \Rightarrow r$	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \Rightarrow z$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

Contoh 2

Pada Latihan 2 di Sub-bab 2.3, kita sudah membuktikan bahwa proposisi

$$(p \Rightarrow q) \text{ dan } (\neg q \vee r)$$

menghasilkan kesimpulan $(p \Rightarrow r)$.

Untuk menguji validitas, coba buat tabel kebenaran untuk

$$((p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Contoh 2

Pada Latihan 2 di Sub-bab 2.3, kita sudah membuktikan bahwa proposisi

$$(p \Rightarrow q) \;\text{ dan }\; (\neg q \vee r)$$

menghasilkan kesimpulan $(p \Rightarrow r)$.

Untuk menguji validitas, coba buat tabel kebenaran untuk

$$((p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

p	q	r	$\neg q$	$x = p \Rightarrow q$	$y = \neg q \vee r$	$z = p \Rightarrow r$	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \Rightarrow z$
T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	F	F	T
T	F	T	T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

Latihan soal

Soal nomor 15, 21, dan 22 dari Buku Referensi “Matematika Diskrit Ed 3 (oleh Rinaldi Munir)”